МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РФ
ФГБОУ ВО КОСТРОМСКАЯ ГСХА

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Для контактной и самостоятельной работы студентов 1-го курса направления подготовки 35.03.05 Садоводство, направленность «Декоративное садоводство» очной и заочной форм обучения

КАРАВАЕВО
Костромская ГСХА
2025

УДК 512(076)
ББК 22.1
М 34

Составитель: канд. филос. наук, доцент кафедры высшей математики Костромской ГСХА *Л.Б. Рыбина.*

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, д-р экон. наук, доцент, профессор кафедры высшей математики Костромской ГСХА *В.И. Цуриков*, канд. физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики Костромской ГСХА *Л.Ю. Головина*.

Рекомендовано методической комиссией архитектурно-строительного факультета в качестве учебно-методического пособия для контактной и самостоятельной работы студентов 1-го курса направления подготовки 35.03.05 Садоводство, направленность «Декоративное садоводство» очной и заочной форм обучения

М 34 **Математика и математическая статистика :** учебно-методическое пособие / сост. Л.Б. Рыбина. — Караваево : Костромская ГСХА, 2025. — 54 с. ; 20 см. — 50 экз. — Текст непосредственный.

Издание содержит задания для контрольных работ, индивидуальных домашних заданий, общие требования к их выполнению, типовые задания с подробными решениями, вопросы и задания для самостоятельного изучения учебного материала, список рекомендуемой литературы.

Учебно-методическое пособие предназначено для организации контактной и самостоятельной работы для студентов 1-го курса направления подготовки 35.03.05 Садоводство, направленность «Декоративное садоводство» очной и заочной форм обучения.

УДК 512(076)
ББК 22.1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ ………………………………………………….... 4
Общие требования к выполнению работ………………………. 4
1. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА …….. 5
1.1. Контрольная работа № 1
«Элементы математического анализа» ……………………... 5
1.2. Самостоятельное изучение учебного материала
Конспект №1 «Основные элементарные функции, их
свойства и графики» ……………………………………….. 19
1.3. Учебно-исследовательская работа № 1
«Применение производной и интеграла в прикладных задачах
будущей деятельности»………………………………………. 20
2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ……………... 20
2.1. Контрольная работа № 2
«Элементы теории вероятностей» …………………………... 20
2.2. Самостоятельное изучение учебного материала
Конспект № 2 «Виды законов распределения случайных
величин» ………………………………………………………. 29
2.3. Учебно-исследовательская работа № 2
«Применение теории вероятностей в прикладных задачах
будущей деятельности» ……………………………………… 30
3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ... 31
3.1. Контрольная работа № 3 «Элементы
математической статистики» …………………………….... 31
3.2. Самостоятельное изучение учебного материала
Конспект № 3 «Точечные и интервальные оценки параметров
распределения» ……………………………………………….. 43
3.3. Учебно-исследовательская работа № 3
«Применение математической статистики в прикладных
задачах будущей деятельности» ……………………………... 45
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ …………….. 46
ПРИЛОЖЕНИЯ ………………………………………………. 47

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие по организации контактной и самостоятельной работы предназначено для студентов 1-го курса направления подготовки 35.03.05 Садоводство, направленность «Декоративное садоводство» очной и заочной форм обучения.

Издание содержит задания для контрольных работ, общие требования к их выполнению, типовые задания с подробными решениями, вопросы и задания для самостоятельного изучения учебного материала, список рекомендуемой литературы.

Контрольные работы являются одной из основных форм текущего контроля знаний обучающихся. Контрольные работы содержат комплект заданий, выполняя которые, студенты должны продемонстрировать умение решать типовые задачи и проводить типовые расчеты.

Для достижения этой цели задания подобраны таким образом, чтобы они охватывали все основные типы задач.

Общие требования к выполнению контрольных работ

Контрольная работа должна выполняться студентом самостоятельно и по своему варианту. Номер варианта определяет преподаватель.

Задачи в работе следует располагать по порядку, полностью переписывая условие. Решение задач следует излагать подробно. Все записи, чертежи должны быть аккуратными, четкими и разборчивыми.

В тексте работы необходимо оставить поля шириной 3-5 см для замечаний рецензента.

1. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

1.1. Контрольная работа № 1 «Элементы математического анализа»

Базовый уровень

Задание 1. Найти производные заданных функций (табл. 1).

Таблица 1. Исходные данные

№ варианта	Функция	№ варианта	Функция
1	*2*	*3*	*4*
1	1) $y=(3x-4\sqrt[3]{x}+2)^4$ 2) $y=\dfrac{4x+7\mathrm{tg}x}{\sqrt{1+9x^2}}$ 3) $y=\cos 3x e^{\sin x}$	2	1) $y=(3x-2\sqrt[3]{x^2}-1)^2$ 2) $y=\dfrac{\arcsin 3x}{1-8x^2}$ 3) $y=2^{3x}\,\mathrm{tg}2x$
3	1) $y=(x^2-\dfrac{1}{x^3}+5\sqrt{x})^4$ 2) $y=\dfrac{\arcsin 7x}{x^4+e^x}$ 3) $y=e^{\mathrm{tg}x}\ln 2x$	4	1) $y=(4x^2-\dfrac{3}{\sqrt{x}}+4)^3$ 2) $y=\dfrac{\sin 2x}{\cos 5x}$ 3) $y=2^{8x}\,\mathrm{tg}3x$
5	1) $y=(x^5-\sqrt[3]{x}+1)^5$ 2) $y=\dfrac{\sqrt{1-4x^2}}{2^x+\mathrm{tg}x}$ 3) $y=e^{\mathrm{ctg}x}\sin 4x$	6	1) $y=(6x^2-\dfrac{2}{x^4}+5)^2$ 2) $y=\dfrac{\cos 3x}{\sqrt{3x^2+4}}$ 3) $y=3^{\mathrm{tg}x}\arcsin x^2$
7	1) $y=(x^3-4\sqrt[4]{x^3}+2)^3$ 2) $y=\dfrac{\mathrm{arc\,tg}7x}{2-9x^2}$ 3) $y=e^{\mathrm{ctg}x}\cos 6x$	8	1) $y=(x^2-2\sqrt[5]{x}+4)^4$ 2) $y=\dfrac{x^3+e^x}{\sqrt{4-9x^5}}$ 3) $y=4^{\cos x}\,\mathrm{arctg}2x$
9	1) $y=(3x^5-\dfrac{5}{x^3}-2)^5$ 2) $y=\dfrac{\cos 6x}{\sin 3x}$ 3) $y=e^{x^3}\,\mathrm{tg}7x$	10	1) $y=(x^4+2\sqrt[3]{x}+1)^2$ 2) $y=\dfrac{\sqrt{3-5x^3}}{e^x-\mathrm{ctg}x}$ 3) $y=4^{5x}\,\mathrm{ctg}6x$

1	*2*	*3*	*4*
11	1) $y=(4x^2-\frac{3}{\sqrt{x}}+4)^3$ 2) $y=\frac{5x+7\cos x}{\sqrt{1+4x^2}}$ 3) $y=\mathrm{ctg}6xe^{\cos 2x}$	12	1) $y=(2x-4\sqrt[4]{x^3}-6)^3$ 2) $y=\frac{\mathrm{arctg}4x}{1-7x^3}$ 3) $y=4^{5x}\mathrm{ctg}6x$
13	1) $y=(x^6-\frac{1}{x^4}+5\sqrt{x})^5$ 2) $y=\frac{\arccos 6x}{x^3+e^{2x}}$ 3) $y=e^{\mathrm{ctg}x}\ln 6x$	14	1) $y=(5x^5-\frac{7}{\sqrt{x}}+4)^4$ 2) $y=\frac{\sqrt{1-3x^5}}{4^x+\mathrm{ctg}2x}$ 3) $y=7^{5x}\mathrm{ctg}2x$
15	1) $y=(x^5-\sqrt[3]{x}+1)^5$ 2) $y=\frac{\sqrt{1-3x^5}}{4^x+\mathrm{ctg}2x}$ 3) $y=e^{\cos 3x}\arcsin 4x$	16	1) $y=(6x^2-\frac{2}{x^4}+5)^2$ 2) $y=\frac{\cos 3x}{\sqrt{3x^2+4}}$ 3) $y=3^{\mathrm{tg}x}\arcsin x^2$
17	1) $y=(3x-3\sqrt[5]{x}+2)^6$ 2) $y=\frac{\sin 6x}{\cos\frac{x}{3}}$ 3) $y=2^{\sin x}\arcsin 2x$	18	1) $y=(4x^2-\frac{3}{\sqrt{x}}+4)^3$ 2) $y=\frac{\sqrt{1-4x^2}}{2^x+\mathrm{tg}x}$ 3) $y=4^{\cos x}\mathrm{arctg}2x$
19	1) $y=(3x^5-\frac{5}{x^3}-2)^5$ 2) $y=\frac{\sqrt{3-5x^3}}{e^x-\mathrm{ctg}x}$ 3) $y=e^{\mathrm{ctg}x}\sin 4x$	20	1) $y=(3x-2\sqrt[3]{x^2}-1)^2$ 2) $y=\frac{\sqrt{1-3x^5}}{4^x+\mathrm{ctg}2x}$ 3) $y=4^{5x}\mathrm{ctg}6x$

Задание 2. Найти неопределенные интегралы (табл. 2).

Таблица 2. Исходные данные

№ варианта	Интегралы	№ варианта	Интегралы
1	*2*	*3*	*4*
1	1) $\int\left(3x^2+\frac{8}{x^5}+11\sqrt[9]{x^2}\right)dx$ 2) $\int\sqrt{\cos x}\sin xdx$	2	1) $\int\left(2-\frac{3}{x^4}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ 2) $\int\frac{x}{2+x^4}dx$
3	1) $\int\left(5x^4-\frac{3}{x^4}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$ 2) $\int\frac{\ln^3 xdx}{x}$	4	1) $\int\left(3x^2+\frac{5}{x^6}-\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ 2) $\int\frac{\sqrt{\ln x}dx}{x}$
5	1) $\int\left(4x^3-\frac{2}{x^3}-\frac{5}{\sqrt[7]{x^2}}\right)dx$ 2) $\int\frac{arctgx}{1+x^2}dx$	6	1) $\int\left(5x^4-\frac{4}{x^5}+\frac{9}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$ 2) $\int\frac{x}{\sqrt{1-2x^2}}dx$
7	1) $\int\left(6x^5-\frac{1}{x^2}-8\sqrt[5]{x^3}\right)dx$ 2) $\int\frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$	8	1) $\int\left(7x^6-\frac{3}{x^4}+3\sqrt{x}\right)dx$ 2) $\int\frac{x}{2x^4+5}dx$
9	1) $\int\left(8x-\frac{5}{x^6}+7\sqrt[6]{x}\right)dx$ 2) $\int e^{-x^2}xdx$	10	1) $\int\left(4-\frac{1}{x^3}-\frac{6}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx$ 2) $\int\frac{dx}{x\ln x}$
11	1) $\int\left(4x^2+\frac{7}{x^5}+19\sqrt[9]{x^2}\right)dx$ 2) $\int\frac{xdx}{9+x^4}$	12	1) $\int\left(7-\frac{4}{x^4}-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ 2) $\int\cos^6 x\sin xdx$
13	1) $\int\left(7x^4-\frac{8}{3x^4}-\frac{5}{3\sqrt{x}}\right)dx$ 2) $\int\frac{\ln^8 xdx}{x}$	14	1) $\int\left(2x^2+\frac{5}{4x^6}-\frac{1}{7\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ 2) $\int\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

1	2	3	4
15	1) $\int\left(8x^3-\frac{2}{5x^3}-\frac{7}{\sqrt[7]{x^2}}\right)dx$ 2) $\int\frac{x}{x^4+25}dx$	16	1) $\int\left(3x^4-\frac{3}{x^5}+\frac{8}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$ 2) $\int\frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}dx$
17	1) $\int\left(2x^6-\frac{4}{x^4}+9\sqrt{x}\right)dx$ 2) $\int\frac{\cos x}{\sqrt[4]{\sin x}}dx$	18	1) $\int\left(8x^5-\frac{1}{4x^2}-3\sqrt[5]{x^3}\right)dx$ 2) $\int\frac{\mathrm{arcctg}x}{1+x^2}dx$
19	1) $\int\left(7x-\frac{5}{2x^6}+5\sqrt[6]{x}\right)dx$ 2) $\int e^{-x^3}x^2dx$	20	1) $\int\left(5-\frac{9}{5x^3}-\frac{3}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx$ 2) $\int\frac{dx}{x\ln^4 x}$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл (табл. 3).

Таблица 3. Исходные данные

№ варианта	Интеграл	№ варианта	Интеграл
1	*2*	*3*	*4*
1	$\int_0^2 x\sqrt{5+x^2}\,dx$	11	$\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\pi^2}\frac{\cos\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}}$
2	$\int_0^{12\sqrt{3}}\frac{12x^5dx}{\sqrt{x^6+1}}$	12	$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{x^2dx}{1+x^6}$
3	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^2 xdx$	13	$\int_1^e\frac{\sin(\ln x)}{x}dx$
4	$\int_0^{-3}\frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$	14	$\int_1^{\sqrt{e}}\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$
5	$\int_0^2\frac{x^3dx}{\sqrt{x^4+4}}$	15	$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^3 xdx$
6	$\int_1^e\frac{1+\ln x}{x}dx$	16	$\int_1^{\sqrt{2}}\frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$

1	2	3	4
7	$\int_0^1 \frac{x^3dx}{x^8+1}$	17	$\int_1^e \frac{\ln^2 xdx}{x}$
8	$\int_0^1 x^3\sqrt{4+5x^4}dx$	18	$\int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2-9}$
9	$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$	19	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3-\sin x}dx$
10	$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$	20	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x}{4-\cos x}dx$

Повышенный уровень

Задание 4. Исследовать данную функцию $y = f(x)$ (табл. 4) методами дифференциального исчисления и построить ее график.

Исследование и построение графика рекомендуется проводить по следующей схеме:

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на четность, нечетность;

3) исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва, если они существуют, определить их род;

4) найти точки экстремума и экстремумы функции, определить интервалы возрастания и убывания функции;

5) найти точки перегиба графика функции, определить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции;

6) найти точки пересечения графика функции с осями координат; при необходимости можно дополнительно найти точки графика функции, давая значению x ряд значений и вычисляя соответствующие значения y;

7) построить график функции, используя результаты исследования.

Таблица 4. Исходные данные

№ варианта	$y=f(x)$
1	*2*
1	$y=2x^3-9x^2+12x-5$
2	$y=x^3-6x^2+9x+1$
3	$y=x^3-3x^2-9x+10$
4	$y=x^3+3x^2-9x-10$
5	$y=x^3+6x^2+9x+2$

1	2
6	$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$
7	$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8$
8	$y = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 7$
9	$y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 32$
10	$y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 20$
11	$y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 21$
12	$y = 2x^3 + 15x^2 + 36x + 32$
13	$y = 2x^3 + 15x^2 + 24x - 2$
14	$y = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$
15	$y = x^3 - 3x^2 - 24x + 26$
16	$y = x^3 + 3x^2 - 24x - 21$
17	$y = x^3 + 9x^2 + 24x + 17$
18	$y = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 56$
19	$y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 61$
20	$y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 4$

Задание 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями (табл. 5). Построить фигуру.

Таблица 5. Исходные данные

Номер варианта	Уравнения линий
1	*2*
1	$y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1, \quad y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6$
2	$y = \frac{1}{2}x^2 + x + 2, \quad y = -\frac{1}{2}x^2 - 5x + 7$
3	$y = \frac{1}{3}x^2 - 3x + 2, \quad y = -\frac{2}{3}x^2 - 2x + 4$
4	$y = 2x^2 + 6x - 3, \quad y = -x^2 + x + 5$
5	$y = 3x^2 - 5x - 1, \quad y = -x^2 + 2x + 1$
6	$y = x^2 - 3x - 1, \quad y = -x^2 - 2x + 5$
7	$y = 2x^2 - 6x + 1, \quad y = -x^2 + x - 1$

1	*2*
8	$y=\frac{1}{3}x^2-2x+4,\quad y=-\frac{2}{3}x^2-x+2$
9	$y=x^2-5x-3,\quad y=-3x^2+2x-1$
10	$y=x^2-2x-5,\quad y=-x^2-x+1$
11	$y=\frac{1}{4}x^2-2x-5,\quad y=-\frac{3}{4}x^2-x+1$
12	$y=\frac{1}{2}x^2+3x-2,\quad y=-\frac{1}{2}x^2-x+3$
13	$y=2x^2-6x-2,\quad y=-x^2+x-4$
14	$y=2x^2+3x+1,\quad y=-x^2-2x+9$
15	$y=x^2-2x-4,\quad y=-x^2-x+2$
16	$y=\frac{1}{2}x^2-3x-2,\quad y=-\frac{1}{2}x^2-7x+3$
17	$y=2x^2+4x-7,\quad y=-x^2-x+1$
18	$y=2x^2-6x+3,\quad y=-2x^2+x+5$
19	$y=\frac{1}{2}x^2-3x-1,\quad y=-\frac{1}{2}x^2-x+2$
20	$y=x^2-3x-4,\quad y=-x^2-x+8$

Пример выполнения типовых заданий

Базовый уровень

Задание 1. Найти производные заданных функций

1) $y=\left(x^4-\frac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-6\right)^3$;

2) $y=\frac{\cos\frac{x}{4}}{x^2}$;

3) $y=e^{\text{ctg}x}\arcsin\sqrt{x}$;

Решение

1) $y=\left(x^4-\dfrac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-6\right)^3$ — сложная функция.

Применим формулы дифференцирования:

$$\left(u^3\right)'=3u^2u',\ \left(x^n\right)'=nx^{n-1},$$

а также формулы

$$\frac{1}{x^n}=x^{-n},\ \ \sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}.$$

Имеем

$$y'=3\left(x^4-\frac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-6\right)^2\left(x^4-\frac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-6\right)'=.$$

$$=3\left(x^4-\frac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-6\right)^2\left(x^4-2x^{-3}+x^{\frac{2}{3}}-6\right)'=$$

$$=3\left(x^4-\frac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-6\right)^2\left(4x^3+6x^{-4}+\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)=$$

$$=3\left(x^4-\frac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-6\right)^2\left(4x^3+\frac{6}{x^4}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right).$$

2) Для дифференцирования функции $y=\dfrac{\cos\frac{x}{4}}{x^2}$ применим правило производной частного:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Получим

$$y'=\frac{\left(\cos\frac{x}{4}\right)'x^2-\cos\frac{x}{4}\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2}=\frac{-\sin\frac{x}{4}\left(\frac{1}{4}x\right)'-\cos\frac{x}{4}\cdot 2x}{x^4}=$$

$$=\frac{-\frac{1}{4}\sin\frac{x}{4}-2x\cos\frac{x}{4}}{x^4}.$$

3) Для дифференцирования функции $y=e^{\operatorname{ctg}x}\arcsin\sqrt{x}$ применим правило производной произведения:

$$(uv)'=u'v+uv'.$$

Получим

$$y' = \left(e^{\operatorname{ctg} x}\right)' \arcsin\sqrt{x} + e^{\operatorname{ctg} x}\left(\arcsin\sqrt{x}\right)' =$$

$$= e^{\operatorname{ctg} x}\left(\operatorname{ctg} x\right)' \arcsin\sqrt{x} + e^{\operatorname{ctg} x}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}\left(\sqrt{x}\right)' =$$

$$= e^{\operatorname{ctg} x}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\arcsin\sqrt{x} + e^{\operatorname{ctg} x}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= e^{\operatorname{ctg} x}\left(-\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sin^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}\right) =$$

$$= e^{\operatorname{ctg} x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} - \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sin^2 x}\right).$$

Задание 2. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int\left(\frac{4}{x^2} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^5} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$;

2) $\int e^{x^5} x^4 dx$;

Решение

1) $\int\left(\frac{4}{x^2} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^5} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$.

Применим формулу интегрирования $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, получим:

$$\int\left(\frac{4}{x^2} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^5} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}}\right)dx = 4\int x^{-2}dx - \frac{1}{2}\int x^{\frac{5}{3}}dx + 6\int x^{-\frac{1}{3}}dx =$$

$$= 4\cdot\frac{x^{-1}}{-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} + 6\cdot\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = -\frac{4}{x} - \frac{3\sqrt[3]{x^8}}{16} + 9\sqrt[3]{x^2} + C.$$

2) $\int e^{x^5} x^4 dx$.

Применим способ замены переменной:

$$\int e^{x^5}x^4dx=\begin{bmatrix} u=x^5, \\ du=5x^4dx, \\ x^4dx=\dfrac{1}{5}du \end{bmatrix}=\frac{1}{5}\int e^u du=\frac{1}{5}e^u+C=\frac{1}{5}e^{x^5}+C.$$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$.

Решение

Выполним замену переменной. Пусть $t=1+x^2$, тогда $dt=2xdx$, откуда $xdx=\frac{1}{2}dt$. Находим новые пределы интегрирования. Если $x=0$, то $t=1$. Если $x=\sqrt{3}$, то $t=4$, что следует из зависимости $t=1+x^2$.

Тогда

$$\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_1^4\sqrt[3]{t}\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_1^4 t^{\frac{1}{3}}dt=$$

Применим формулу интеграла от степенной функции $\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$ и формулу Ньютона-Лейбница $\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$:

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3t^{\frac{4}{3}}}{4}\Bigg|_1^4=\frac{3\sqrt[3]{t^4}}{8}\Bigg|_1^4=\frac{3}{8}\sqrt[3]{4^4}-\frac{3}{8}\sqrt[3]{1^4}=\frac{3}{8}\left(4\sqrt[3]{4}-1\right).$$

Ответ: $\frac{3}{8}\left(4\sqrt[3]{4}-1\right)$.

Задание 4. Исследовать функцию $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+5$ методами дифференциального исчисления и построить ее график.

Исследование и построение графика рекомендуется проводить по следующей схеме:

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на четность, нечетность;

3) исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва, если они существуют, определить их род;

4) найти точки экстремума и экстремумы функции, определить интервалы возрастания и убывания функции;

5) найти точки перегиба графика функции, определить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции;

6) найти точки пересечения графика функции с осями координат; при необходимости можно дополнительно найти точки графика функции, давая значению x ряд значений и вычисляя соответствующие значения y;

7) построить график функции, используя результаты исследования.

Решение

1. Область определения функции: $D(y) = R$.

2. Данная функция является элементарной, поэтому она непрерывна на своей области определения.

3. Исследуем функцию на четность:

$$y(-x) = \frac{1}{3}(-x)^3 - (-x)^2 - 3(-x) + 5 = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 5.$$

Так как $y(-x) \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной, то есть это функция общего вида. Ее график не будет обладать симметрией относительно начала координат и оси Oy.

4. Найдем первую производную:

$$y' = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5\right)' = x^2 - 2x - 3.$$

Найдем критические точки функции. Приравняем производную к нулю и решим уравнение:

$$x^2 - 2x - 3 = 0;$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16;$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1},$$

$$x_1 = -1,\ x_2 = 3.$$

Точек, в которых производная не существует, у данной функции нет.

На числовую ось нанесем область определения функции и критические точки. Эти точки разбивают область определения на три интервала: $(-\infty; -1)$, $(-1; 3)$, $(3; +\infty)$. В полученных интервалах расставляем знак производной y' (рис. 1).

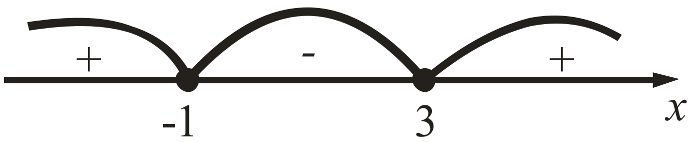

Рис. 1. Исследование на экстремум

Данная функция возрастает на интервалах $(-\infty;-1)$, $(3;+\infty)$ и убывает на интервале $(-1;3)$.

$x=-1$ — точка максимума, $x=3$ — точка минимума.

Найдем экстремумы функции:

$$y_{\max}=y(-1)=\frac{1}{3}\cdot(-1)^3-(-1)^2-3\cdot(-1)+5=6\frac{2}{3},$$

$$y_{\min}=y(3)=\frac{1}{3}\cdot 3^3-3^2-3\cdot 3+5=-4.$$

5. Найдем вторую производную:

$$y''=\left(x^2-2x-3\right)''=2x-2.$$

Найдем критические точки второго рода. Приравняем производную y'' к нулю и решим уравнение:

$$2x-2=0,$$

$$x=1.$$

Точек, в которых вторая производная y'' не существует, нет.

На числовую ось нанесем область определения функции и критическую точку второго рода. Область определения разбивается на два интервала: $(-\infty;1)$ и $(1;+\infty)$. В полученных интервалах расставим знак второй производной y'' (рис. 2).

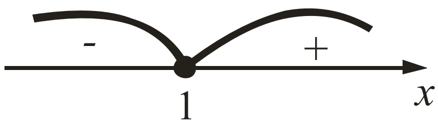

Рис. 2. Исследование на выпуклость, вогнутость, точки перегиба

График функции выпуклый на интервале $(-\infty;1)$ и вогнутый на интервале $(1;+\infty)$.

При переходе через критическую точку второго рода $x=1$ вторая производная меняет знак, следовательно, $x=1$ – абсцисса точки перегиба.

Вычислим значение функции в точке $x=1$:

$$y(1)=\frac{1}{3}\cdot 1^3-1^2-3\cdot 1+5=\frac{1}{3}-1-3+5=1\frac{1}{3}.$$

$y=1\frac{1}{3}$ — ордината точки перегиба.

Итак, $\left(1;1\frac{1}{3}\right)$ — точка перегиба.

6. Для нахождения точки пересечения графика функции с осью Oy подставим в уравнение функции значение $x=0$. Тогда $y=5$. Значит, график функции пересекает ось Oy в точке $(0;5)$.

Для определения точки пересечения исследуемой кривой с осью Ox следует решить кубическое уравнение $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5 = 0$. Оно имеет не более трех решений. Следовательно, график функции пересекает ось Ox не более чем в трех точках.

7. По результатам исследования построим график функции (рис. 3).

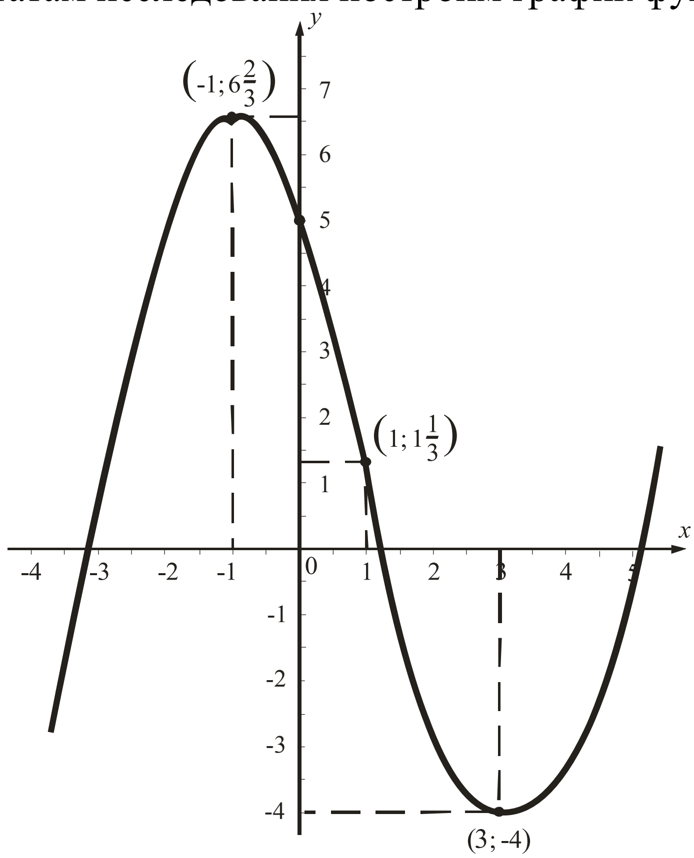

Рис. 3. График функции

Задание 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x^2 - x - 2$ и $y = -x^2 + x - 1$. Построить фигуру.

Решение

Построив линии, получим фигуру (рис. 4).

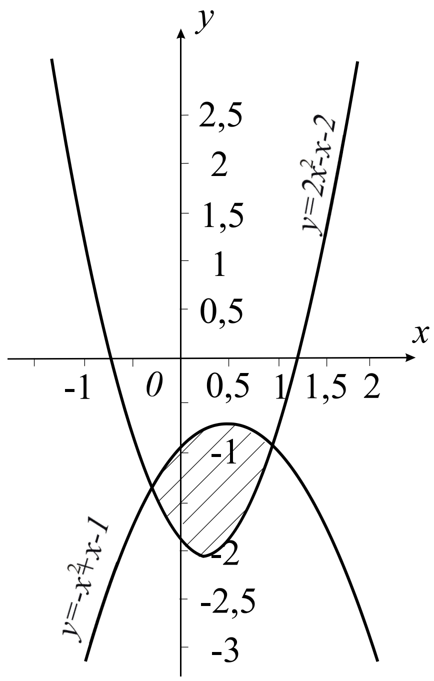

Рис. 4. Фигура

Найдем абсциссы точек пересечения заданных парабол. Для этого приравняем правые части их уравнений:

$$2x^2 - x - 2 = -x^2 + x - 1.$$

Решим полученное квадратное уравнение:

$$3x^2 - 2x - 1 = 0,$$

$$D = 4 + 4 \cdot 3 = 16,$$

$$x_1 = \frac{2+4}{6} = 1, \qquad x_2 = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Вычисление площади осуществляем по формуле $S = \int\limits_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx$, где $y = f(x),\ y = g(x)$ — кривые, ограничивающие фигуру $\left(f(x) \geq g(x)\right)$.

Тогда $S = \int\limits_{-\frac{1}{3}}^{1} \left(\left(-x^2 + x - 1\right) - \left(2x^2 - x - 2\right)\right)dx = \int\limits_{-\frac{1}{3}}^{1} \left(-3x^2 + 2x + 1\right)dx =$

$$= \left(-3 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_{-\frac{1}{3}}^{1} = \left(x^3 + x^2 + x\right)\Big|_{-\frac{1}{3}}^{1} =$$

$$= (-1 + 1 + 1) - \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3}\right) = \frac{34}{27} \text{ (кв. ед.)}.$$

Ответ: $\frac{34}{27}$ кв. ед.

1.2. Самостоятельное изучение учебного материала

Конспект №1 «Основные элементарные функции, их свойства и графики»

Заполните таблицу «Основные элементарные функции» (табл. 6).

Таблица 6. Основные элементарные функции

Обозначение функции	Область определения $D(y)$	Область значений $E(y)$	Четность, нечетность	Моно-тон-ность	Периодич-ность	График функции
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
Степенная функция						
$y = x^n$ $n \in N$, n – четное						
$y = x^n$ $n \in N$, n – нечетное						
$y = x^{-n}$ $n \in N$, n – четное						
$y = x^{-n}$ $n \in N$, n – нечетное						
$y = \sqrt[n]{x}$ $n \in N$, $n > 1$ n – нечетное						
$y = \sqrt[n]{x}$ $n \in N$, $n > 1$ n – четное						
Показательная функция						
$y = a^x$ $0 < a < 1$						
$y = a^x$ $a > 1$						
Логарифмическая функция						
$y = \log_a x$ $0 < a < 1$						
$y = \log_a x$ $a > 1$						

1	2	3	4	5	6	7
Тригонометрические функции						
$y = \sin x$						
$y = \cos x$						
$y = \mathrm{tg} x$						
$y = \mathrm{ctg} x$						
Обратные тригонометрические функции						
$y = \arcsin x$						
$y = \arccos x$						
$y = \mathrm{arctg} x$						
$y = \mathrm{arcctg} x$						

Учебно-исследовательская работа № 1
«Применение производной и интеграла в прикладных задачах будущей деятельности»

Составьте и решите 1-2 задачи на применение производной и интеграла в прикладных задачах будущей профессиональной деятельности.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2.1. Контрольная работа № 2
«Элементы теории вероятностей»

Базовый уровень

Задание 1. Решите задачу:

Всхожесть семян данного сорта растений оценивается вероятностью p. Посеяно n семян (табл. 7). Найти вероятность того, что будет:

1) k всходов;

2) не менее k всходов;

3) хотя бы один всход.

Таблица 7. Исходные данные

Номер варианта	n	p	k
1	*2*	*3*	*4*
1	5	$\frac{2}{3}$	3
2	6	$\frac{1}{4}$	2
3	7	$\frac{3}{5}$	5

1	*2*	*3*	*4*
4	8	$\frac{1}{3}$	6
5	5	$\frac{2}{5}$	4
6	6	$\frac{2}{3}$	5
7	7	$\frac{3}{4}$	3
8	8	$\frac{3}{5}$	4
9	5	$\frac{3}{4}$	3
10	6	$\frac{3}{5}$	5
11	7	$\frac{1}{3}$	4
12	8	$\frac{2}{5}$	5
13	5	$\frac{2}{3}$	3
14	6	$\frac{3}{5}$	4
15	7	$\frac{1}{3}$	5
16	8	$\frac{2}{5}$	6
17	5	$\frac{2}{3}$	4
18	6	$\frac{1}{3}$	4
19	7	$\frac{2}{5}$	3
20	8	$\frac{2}{3}$	7

Задание 2. Решите задачу:

Завод сортовых семян выпускает гибридные семена кукурузы. Известно, что семена первого сорта составляют p %. Определите вероятность того, что из взятых наудачу для проверки n семян k будут семенами первого сорта (табл. 8).

Таблица 8. Исходные данные

Номер варианта	n	p	k
1	*2*	*3*	*4*
1	85	80	50
2	90	40	45
3	75	70	60
4	67	50	52
5	38	90	30
6	50	60	46
7	55	95	40
8	60	90	57
9	72	85	60
10	68	75	58
11	85	70	50
12	68	50	60
13	39	90	30
14	40	60	35
15	80	95	68
16	35	90	30
17	48	80	40
18	56	40	50
19	72	70	60
20	83	50	70

Задание 3. Решите задачу:

Вероятность того, что зерно заражено вредителями, равна p. Найти вероятность того, что из n зерен окажется не более k зараженных зерен (табл. 9).

Таблица 9. Исходные данные

Номер варианта	n	p	k
1	*2*	*3*	*4*
1	1000	0,001	2
2	1000	0,002	3
3	1000	0,003	2
4	5000	0,001	3
5	400	0,005	2
6	4000	0,001	3
7	3000	0,001	2
8	2000	0,001	3
9	2000	0,002	2
10	1000	0,004	3
11	100	0,01	3
12	100	0,02	2
13	100	0,03	3

1	*2*	*3*	*4*
14	500	0,01	2
15	200	0,015	3
16	400	0,01	2
17	300	0,01	3
18	200	0,01	2
19	200	0,02	3
20	100	0,04	2

Задание 4. Задан закон распределения дискретной случайной величины в виде таблицы; в первой строке таблицы указаны возможные значения случайной величины, во второй — соответствующие вероятности (табл. 10). Вычислить:

1) математическое ожидание;

2) дисперсию;

3) среднее квадратическое отклонение.

Таблица 10. Исходные данные

Номер варианта	Закон распределения			
1	*2*			
1	X	–3	1	2
	p	0,1	0,6	0,3
2	X	1	3	4
	p	0,1	0,5	0,4
3	X	–1	0	3
	p	0,3	0,2	0,5
4	X	–1	2	4
	p	0,2	0,4	0,4
5	X	–3	–1	0
	p	0,3	0,4	0,3
6	X	–2	1	2
	p	0,1	0,4	0,5
7	X	–4	–1	0
	p	0,3	0,4	0,3
8	X	15	13	10
	p	0,1	0,3	0,6
9	X	8	5	3
	p	0,2	0,4	0,4
10	X	–5	–1	3
	p	0,5	0,3	0,2
11	X	–7	–5	–1
	p	0,5	0,3	0,2

1	2			
12	X	–12	–10	–6
	p	0,5	0,2	0,3
13	X	3	5	8
	p	0,4	0,5	0,1
14	X	1	4	8
	p	0,5	0,3	0,2
15	X	–4	0	5
	p	0,2	0,4	0,4
16	X	–5	–1	3
	p	0,5	0,3	0,2
17	X	–7	–5	–1
	p	0,3	0,5	0,2
18	X	–1	2	4
	p	0,4	0,2	0,4
19	X	1	3	4
	p	0,3	0,1	0,6
20	X	–12	–10	–6
	p	0,2	0,1	0,7

Задание 5. Средняя длина листьев садовой земляники на некотором участке равна a см (табл. 11). Отдельные отклонения от этого значения случайные, распределены по нормальному закону со средним квадратическим отклонением σ см. Наугад взят один лист. Найти вероятность того, что его длина:

1) будет в пределах от α см до β см;

2) отклонится от средней длины не более, чем на ε см.

Таблица 11. Исходные данные

Номер варианта	a	σ	α	β	ε
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	5,1	0,3	3,9	4,4	0,2
2	5,5	0,4	4,8	5,2	0,3
3	6,3	0,2	5,0	5,7	0,1
4	7,1	0,5	6,1	6,9	0,2
5	6,9	0,3	4,8	5,5	0,3
6	7,1	0,7	6,0	6,6	0,1
7	5,8	0,4	4,2	5,5	0,2
8	7,2	0,8	6,3	7,0	0,3
9	5,2	0,6	4,2	5,0	0,1
10	6,2	0,5	5,1	6,0	0,2
11	6,7	0,7	5,8	6,4	0,3
12	7,3	0,9	6,4	7,0	0,1

1	2	3	4	5	6
13	6,5	0,8	5,5	6,1	0,2
14	5,3	0,5	4,5	5,2	0,3
15	6,6	0,6	5,1	5,9	0,1
16	7,5	0,8	6,2	6,9	0,2
17	6,8	0,9	5,1	6,5	0,3
18	7,6	0,3	6,8	7,3	0,1
19	7,7	0,7	6,9	7,6	0,3
20	7,0	0,4	6,3	6,9	0,2

Пример выполнения типовых заданий

Задание 1. Всхожесть семян данного сорта растений оценивается вероятностью $p = 0{,}8$. Посеяно 4 семени. Найти вероятность того, что будет:

1) три всхода;
2) не менее трех всходов;
3) хотя бы один всход.

Решение

Обозначим событие: A — семя взошло.
По условию: $n = 4$, $q = 1–p = 1–0{,}8 = 0{,}2$.

1) Найдем вероятность того, что событие A произойдет ровно три раза, т.е. $k = 3$.

Вероятность того, что событие A в n повторных независимых испытаниях произойдет ровно k раз, находится по *формуле Бернулли:*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где n — число повторных независимых испытаний;
p — вероятность наступления события A в каждом испытании;
q — вероятность непоявления события A в каждом испытании ($q = 1–p$);
k — число наступлений события A,
$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний из n по k элементов.

Тогда

$$P_4(3) = C_4^3 p^3 q^1 = \frac{4!}{3!\ 1!} \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2 = 0{,}4096.$$

2) Событие, заключающееся в том, что из четырех посеянных семян взойдет не менее трех, означает, что взойдет либо три, либо четыре семени. Следовательно, $k = 3, 4$.

Тогда, используя теорему о нахождении вероятности суммы несовместных событий и формулу Бернулли, имеем:

$$P_4(3,\ 4) = P_4(3) + P_4(4) = C_4^3 p^3 q^1 + C_4^4 p^4 q^0 =$$
$$= 4 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2 + 0,8^4 = 0,8192.$$

3) Событие, заключающееся в том, что четырех посеянных семян взойдет хотя бы одно, означает, что $k \ge 1$, т.е. $k = 1, 2, 3, 4$. Найдем вероятность противоположного события — из четырех посеянных семян ни одно не взойдет, т.е. $k = 0$:

$$P_4(0) = C_4^0 p^0 q^4 = 0,2^4 = 0,0016.$$

Тогда

$$P_4(1,\ 4) = 1 - P_4(0) = 1 - 0,0016 = 0,9984.$$

Ответ: 1) 0,4096, 2) 0,8192, 3) 0,9984.

Задание 2. Завод сортовых семян выпускает гибридные семена кукурузы. Известно, что семена первого сорта составляют 40 %. Определите вероятность того, что из взятых наудачу для проверки 26 семян 13 будут семенами первого сорта.

Решение

Обозначим событие: A — семя первого сорта.

По условию:

$n = 26$,

$p = 0,4$,

$q = 1–p = 1–0,4 = 0,6$,

$k = 13$.

Найдем вероятность $P_{26}(13)$. Так как n велико, воспользуемся локальной теоремой Муавра-Лапласа:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x).$$

Вычислим x:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{13 - 26 \cdot 0,4}{\sqrt{26 \cdot 0,4 \cdot 0,6}} \approx \frac{2,6}{2,498} \approx 1,04.$$

По таблице приложения 3 найдем $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \varphi(1,04) \approx 0,2323.$$

Тогда искомая вероятность

$$P_{26}(13) \approx \frac{1}{2,498} \cdot 0,2323 \approx 0,093.$$

Ответ: 0,093.

Задание 3.

Вероятность того, что зерно заражено вредителями, равна 0,002. Найти вероятность того, что из 500 зерен окажется не более двух зараженных зерен.

Решение

Обозначим событие: A — зерно заражено вредителями.

По условию: $n = 500$, $p = 0{,}002$.

Так как n велико, а p мало, используем формулу Пуассона:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

где $\lambda = np = 500 \cdot 0{,}002 = 1$.

Найдем вероятность того, что будет заражено не более двух семян, т.е. $k \le 2$ или $k = 0, 1, 2$.

Тогда

$$P_{500}(0,\ 2) = P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) \approx \frac{1^0 e^{-1}}{0!} + \frac{1^1 e^{-1}}{1!} + \frac{1^2 e^{-1}}{2!} \approx$$

$$\approx e^{-1} + e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2} \approx \frac{5}{2} e^{-1} \approx \frac{5}{2} \cdot 0{,}36788 \approx 0{,}9197.$$

Ответ: 0,9197.

Задание 4. Случайная величина X задана рядом распределения (табл. 12):

Таблица 12. Ряд распределения с. в. X

X	–1	6	13	20	27
P	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Решение

1. Математическое ожидание дискретной случайной величины X найдем по формуле

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Получим:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = -1 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}1 + 13 \cdot 0{,}4 + 20 \cdot 0{,}2 + 27 \cdot 0{,}1 = 12{,}3 .$$

2. Дисперсию случайной величины X найдем по формуле

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2.$$

Составим ряд распределения случайной величины X^2. Для этого возможные значения случайной величины X возведем в квадрат, а соответствующие вероятности оставим такими же (табл. 13):

Таблица 13. Ряд распределения случайной величины X^2

X^2	1	36	169	400	729
P	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

Найдем математическое ожидание случайной величины X^2:

$$M\left(X^2\right)=1\cdot 0,2+36\cdot 0,1+169\cdot 0,4+400\cdot 0,2+729\cdot 0,1=224,3.$$

Тогда

$$D(X)=224,3-(12,3)^2=224,3-151,29=73,01.$$

3. Вычислим среднее квадратическое отклонение случайной величины X:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{73,01}\approx 8,5.$$

Ответ: $M(X)=12,3$, $D(X)=73,01$, $\sigma(X)=\sqrt{73,01}\approx 8,5$.

Задание 5. Средняя длина листьев садовой земляники на некотором участке равна 7,4 см. Отдельные отклонения от этого значения случайные, распределены по нормальному закону со средним квадратическим отклонением 0,8 см. Наугад взят один лист. Найти вероятность того, что его длина:

1) будет в пределах от 7,0 см до 8,2 см;

2) отклонится от средней длины не более, чем на 0,2 см.

Решение

1) Пусть X – длина листа. Так как случайная величина X распределена по нормальному закону, то вероятность того, что она примет значение, принадлежащее промежутку $[\alpha;\beta]$, находим по формуле

$$P(\alpha\le X\le\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ – функция Лапласа, значения которой находим по таблице приложения 4, a – математическое ожидание случайной величины X, σ – среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Тогда

$$P(7,0 \le X \le 8,2) = \Phi\left(\frac{8,2-7,4}{0,8}\right) - \Phi\left(\frac{7,0-7,4}{0,8}\right) = \Phi(1) - \Phi(-0,5) =$$
$$\Phi(1) + \Phi(0,5) \approx 0,3413 + 0,1950 \approx 0,5363.$$

2) Вероятность того, что абсолютная величина отклонения значения случайной величины X от математического ожидания не превосходит ε, находится по формуле

$$P(|X-a| \le \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Тогда $P(|X-7,4| \le 0,2) = 2\Phi\left(\frac{0,2}{0,8}\right) = 2\Phi(0,25) \approx 2 \cdot 0,0987 \approx 0,1974$.

Ответ: 1) 0,5363; 2) 0,1974.

2.2. Самостоятельное изучение учебного материала
Конспект №2 «Виды законов распределения случайных величин»

Самостоятельно изучите материал по источнику: Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст] : учеб. пособие для вузов. – 6-е изд., доп. – Москва : Высшая школа, 2003. – С. 52–53, 65–66, 70, 106–108, 114–117.

Рассмотрите образцы решения задач: Там же. – С. 65, № 195, 196; С. 70, № 207; С. 72, № 213; С. 107, № 313, 315.

Ответьте письменно на вопросы и решите предложенные задачи:

1. Какой вид имеет плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины *X*, распределённой равномерно?
2. Как находится математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины *X*, распределённой равномерно?
3. Какой вид имеет плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины *X*, имеющей показательное распределение?
4. Как находится математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины *X*, имеющей показательное распределение?
5. В каком случае дискретная случайная величина распределена по биномиальному закону? Привести пример.
6. Как находится математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины, распределенной по биномиальному закону?
7. В каком случае дискретная случайная величина распределена по закону Пуассона? Привести пример.
8. Как находится математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины, распределенной по закону Пуассона?

9. Геометрическое распределение дискретной случайной величины (привести пример). Как находится математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины, имеющей геометрическое распределение?

10. График плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины X, распределённой равномерно в интервале $(-1;3)$, имеет вид (рис. 5):

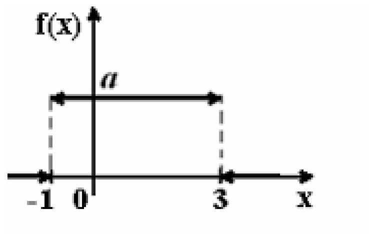

Рис. 5. График плотности распределения вероятностей

Найдите значение a.

11. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст] : учеб. пособие для вузов. – 6-е изд., доп. – Москва : Высшая школа, 2003. – С. 72, №214; С. 107, № 314; С. 108, № 316; С. 116, № 354; С. 117, № 357.

Учебно-исследовательская работа № 2
«Применение теории вероятностей в прикладных задачах будущей деятельности»

Составьте и решите 1-2 задачи на применение теории вероятностей в прикладных задачах будущей профессиональной деятельности.

3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

3.1. Контрольная работа № 3 «Элементы математической статистики»

Базовый уровень

Задание 1.

Заданы результаты обследования (табл. 14–17). Требуется:

1) построить вариационный ряд и гистограмму относительных частот;

2) вычислить выборочную среднюю $\overline{x}_в$, исправленную выборочную дисперсию s^2, исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение s, коэффициент вариации V, среднее квадратическое отклонение выборочной средней $\sigma_{\overline{x}_в}$;

3) с надежностью 95% указать доверительный интервал для оценки генеральной средней $\overline{x}_Г$.

Таблица 14. Исходные данные для вариантов №1–5

Номер наблюдения	Номер варианта				
	1	2	3	4	5
1	3,1	5,5	3,2	3,8	5,2
2	4,2	5,9	3,8	4,3	6,4
3	5,0	7,5	4,1	4,3	6,7
4	4,6	5,4	4,3	5,1	5,8
5	6,4	3,4	4,3	5,7	5,4
6	5,3	5,2	5,6	6,3	4,7
7	3,8	4,3	6,0	4,8	3,3
8	5,1	4,7	5,7	5,6	5,1
9	4,9	5,8	4,5	6,4	4,6
10	5,4	6,8	5,0	7,2	5,8
11	5,9	4,0	6,7	5,0	6,0
12	6,5	5,7	5,3	5,3	7,1
13	5,5	4,5	5,4	5,1	5,2
14	5,7	5,3	4,7	4,2	5,5
15	4,7	6,3	4,3	3,7	4,7
16	5,6	5,2	5,9	6,0	4,8
17	5,8	4,1	6,5	4,5	5,4
18	7,3	5,1	7,1	4,7	4,9
19	4,7	5,0	3,4	5,7	3,8
20	5,5	6,2	4,6	5,2	5,5

Таблица 15. Исходные данные для вариантов №6–10

Номер наблюдения	Номер варианта				
	6	7	8	9	10
1	27	43	36	39	36
2	32	26	26	32	32
3	31	35	27	27	36
4	32	45	35	36	37
5	28	26	37	32	33
6	37	35	28	34	28
7	35	32	31	26	31
8	26	32	27	23	36
9	28	35	37	28	33
10	32	35	39	36	26
11	39	28	30	36	35
12	34	32	30	28	45
13	30	36	36	31	26
14	37	32	38	30	35
15	26	36	24	32	32
16	27	37	32	24	32
17	40	33	30	38	35
18	35	28	31	36	35
19	37	31	28	30	28
20	28	32	36	30	32

Таблица 16. Исходные данные для вариантов №11–15

Номер наблюдения	Номер варианта				
	11	12	13	14	15
1	6,7	4,6	6,5	5,8	5,1
2	5,3	5,8	5,5	6,8	4,2
3	5,4	6,0	5,7	4,0	3,7
4	4,7	7,1	4,7	5,7	6,0
5	4,3	5,2	5,6	4,5	4,5
6	5,9	5,5	5,8	5,3	4,7
7	6,5	4,7	7,3	6,3	5,7
8	7,1	4,8	4,7	5,2	5,2
9	3,4	5,4	5,5	4,1	3,8
10	4,6	4,9	3,1	5,1	4,3
11	3,2	3,8	4,2	5,0	4,3
12	3,8	5,5	5,0	6,2	5,1
13	4,1	5,2	4,6	5,5	5,7

14	4,3	6,4	6,4	5,9	6,3
15	4,3	6,7	5,3	7,5	4,8
16	5,6	5,8	3,8	5,4	5,6
17	6,0	5,4	5,1	3,4	6,4
18	5,7	4,7	4,9	5,2	7,2
19	4,5	3,3	5,4	4,3	5,0
20	5,0	5,1	5,9	4,7	5,3

Таблица 17. Исходные данные для вариантов №16–20

Номер наблюдения	Номер варианта				
	16	17	18	19	20
1	36	28	26	30	35
2	33	36	28	36	28
3	26	36	32	38	32
4	35	28	39	24	36
5	45	31	34	32	32
6	26	30	30	30	36
7	35	32	37	31	37
8	32	24	26	28	33
9	32	38	27	36	28
10	35	36	40	36	31
11	35	30	35	26	32
12	28	30	37	27	43
13	32	39	28	35	26
14	36	32	27	37	35
15	32	27	32	28	45
16	36	36	31	31	26
17	37	32	32	27	35
18	33	34	28	37	32
19	28	26	37	39	32
20	31	23	35	30	35

Задание 2. Проверить нулевую гипотезу о том, что заданное значение a_0 является математическим ожиданием нормально распределенной случайной величины при 5 %-м уровне значимости для двусторонней критической области, если в результате обработки выборки объема $n = 10$ получено выборочное среднее $\overline{x_в}$, а выборочное среднее квадратическое отклонение равно s (табл. 18).

Таблица 18. Исходные данные

Номер варианта	a_0	$\overline{x_в}$	s
1	9	10	1
2	10	11	0,5
3	10	9	0,8
4	11	10	0,9
5	12	11	1,1
6	11	12	0,7
7	13	12	0,6
8	12	13	1
9	14	15	0,5
10	15	14	0,8
11	8	9	0,9
12	9	8	1,1
13	8	7	0,7
14	7	8	1
15	16	15	0,5
16	15	16	0,8
17	17	18	0,9
18	18	17	1,1
19	19	20	0,7
20	20	19	1

Задание 3. Даны значения переменных X и Y (табл. 19).

Требуется:

1) найти коэффициент корреляции и сделать вывод о тесноте и направлении линейной корреляционной связи межу переменными X и Y;

2) составить уравнение прямой регрессии Y на X;

3) нанести на чертеж исходные данные и построить прямую регрессии.

Таблица 19. Исходные данные

№ вар.	№ наблюдения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	x_i	97	104	103	98	101	102	100	99	96	98
	y_i	35	31	32	34	30	33	31	34	35	32
2	x_i	93	101	95	97	102	94	96	100	95	92
	y_i	36	31	34	35	30	35	36	31	36	37
3	x_i	104	98	100	102	99	97	95	101	103	98
	y_i	31	35	32	31	32	33	36	32	30	35
4	x_i	95	90	103	104	89	97	101	96	99	102
	y_i	36	37	32	31	37	35	34	34	33	32

5	x_i	102	95	97	98	94	90	100	101	93	96
	y_i	32	37	35	34	37	38	30	31	36	35
6	x_i	91	86	94	95	104	92	98	84	96	99
	y_i	62	43	60	73	87	65	79	52	65	68
7	x_i	82	101	105	96	98	112	106	93	110	91
	y_i	51	59	78	63	73	68	65	62	70	62
8	x_i	103	96	93	100	89	97	98	87	106	97
	y_i	79	61	59	68	55	70	66	54	75	61
9	x_i	85	94	92	104	101	98	93	87	89	95
	y_i	56	63	60	71	64	59	61	49	58	65
10	x_i	98	90	94	107	99	91	84	93	102	95
	y_i	61	49	59	75	61	68	62	74	80	57
11	x_i	96	102	101	100	103	99	98	97	95	103
	y_i	36	32	30	34	31	35	31	33	36	32
12	x_i	94	100	95	96	101	94	97	100	98	92
	y_i	34	31	36	35	32	35	33	35	36	37
13	x_i	102	99	101	104	96	97	95	100	103	98
	y_i	31	35	32	31	32	33	36	32	30	35
14	x_i	95	90	103	104	89	97	101	96	99	102
	y_i	34	38	32	31	36	37	34	37	33	32
15	x_i	101	95	97	98	94	90	100	102	93	96
	y_i	38	35	35	34	38	37	30	31	36	35
16	x_i	99	86	94	95	104	92	98	84	96	96
	y_i	64	43	61	73	88	65	79	52	65	68
17	x_i	93	101	105	96	98	112	106	94	110	91
	y_i	50	59	76	63	73	68	64	62	70	62
18	x_i	100	96	92	103	89	97	98	87	106	97
	y_i	79	61	58	68	55	70	66	54	75	61
19	x_i	84	94	95	104	101	98	93	88	89	95
	y_i	57	63	64	70	64	59	61	49	58	65
20	x_i	97	89	95	106	98	92	85	94	103	97
	y_i	61	48	59	75	62	67	60	72	78	58

Повышенный уровень

Задание 4. При уровне значимости $\alpha = 0,05$ методом дисперсионного анализа проверить нулевую гипотезу о влиянии фактора на качество объекта на основании пяти измерений для трех уровней фактора (табл. 20).

Таблица 20. Исходные данные

Номер измерения	Φ_1	Φ_2	Φ_3
1	24	18	22
2	16	14	15
3	12	10	16
4	5	4	12
5	6	16	8

Пример выполнения типовых заданий

Базовый уровень

Задание 1. Из крупной партии растений произведена случайная выборка, получено 20 вариант длины стебля (в см): 35,9; 35,3; 42,7; 45,2; 25,9; 35,3; 33,4; 27,0; 35,9; 38,8; 33,7; 38,6; 40,9; 35,5; 44,1; 37,4; 34,2; 30,8; 38,4; 31,3.

Требуется:

1) построить вариационный ряд и гистограмму относительных частот;

2) вычислить выборочную среднюю $\overline{x}_в$, исправленную выборочную дисперсию s^2, исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение s, коэффициент вариации V, среднее квадратическое отклонение выборочной средней $\sigma_{\overline{x}_в}$;

3) с надежностью 95% указать доверительный интервал для оценки генеральной средней $\overline{x}_Г$.

Решение

1) Запишем исходные данные в виде ранжированного ряда, т.е. располагая их в порядке возрастания:

25,9; 27,0; 30,8; 31,3; 33,4; 33,7; 34,2; 35,3; 35,3; 35,5; 35,9; 35,9; 37,4; 38,4; 38,6; 38,8; 40,9; 42,7; 44,1; 46,2.

Максимальное значение признака составляет 46,3 см, а минимальное – 25,9 см. Разница между ними равна 20,3 см. Этот интервал надо разбить на определенное количество классов. При малом объеме выборки (20–40 вариант) намечают 5–6 классов. Возьмем длину классового интервала $\Delta x_i = 5$. Получаем пять интервалов: первый 25–30, второй 30–35, третий

35–40, четвертый 40–45, пятый 45–50 (начало первого интервала не обязательно должно совпадать со значением минимальной варианты).

С помощью ранжированного ряда определяем частоту попадания вариант выборки в каждый интервал. В первый интервал попадает два значения (25,9 и 27,0), поэтому $n_1 = 2$. Во второй интервал попадают пять значений, поэтому $n_2 = 5$. Аналогично находим $n_3 = 9$, $n_4 = 3$, $n_5 = 1$.

Определяем относительные частоты попадания вариант выборки в каждый интервал:

в первый интервал — $w_1 = \dfrac{n_1}{n} = \dfrac{2}{20} = 0{,}1$;

во второй интервал — $w_1 = \dfrac{n_2}{n} = \dfrac{5}{20} = 0{,}25$;

в третий интервал — $w_3 = \dfrac{n_3}{n} = \dfrac{9}{20} = 0{,}45$;

в четвертый интервал — $w_4 = \dfrac{n_4}{n} = \dfrac{3}{20} = 0{,}15$;

в пятый интервал — $w_5 = \dfrac{n_5}{n} = \dfrac{1}{20} = 0{,}05$.

Сумма $\sum w_i = 1$, следовательно, вычисления выполнены верно.

Определим плотность относительных частот вариант как отношение относительной частоты w_i к длине интервала Δx_i, то есть

$$p_i = \frac{w_i}{\Delta x_i}.$$

Для первого интервала — $p_1 = \dfrac{w_1}{\Delta x_1} = \dfrac{0{,}1}{5} = 0{,}02$;

для второго интервала — $p_2 = \dfrac{w_2}{\Delta x_2} = \dfrac{0{,}25}{5} = 0{,}05$;

для третьего интервала — $p_3 = \dfrac{w_3}{\Delta x_3} = \dfrac{0{,}45}{5} = 0{,}09$;

для четвертого интервала — $p_4 = \dfrac{w_4}{\Delta x_4} = \dfrac{0{,}15}{5} = 0{,}03$;

для пятого интервала — $p_5 = \dfrac{w_5}{\Delta x_5} = \dfrac{0{,}05}{5} = 0{,}01$.

Результаты выполнения расчетов сводим в таблицу 21:

Таблица 21. Таблица частот, относительных частот, плотности относительных частот

Интервал значений длины стебля Δx_i	25—30	30—35	35—40	40—45	45—50	
Частоты вариант n_i	2	5	9	3	1	$\sum n_i = 20$
Относительные частоты w_i	0,10	0,25	0,45	0,15	0,05	$\sum w_i = 1{,}00$
Плотность относительных частот p_i	0,02	0,05	0,09	0,03	0,01	

Построим гистограмму, показывающую зависимость плотности относительных частот от значения вариант. По горизонтальной оси наносим шкалу возможных значений вариант, по вертикальной оси – плотность относительных частот; величину относительной плотности считаем постоянной внутри соответствующего интервала. Получаем столбчатую диаграмму, называемую гистограммой относительных частот (постройте самостоятельно).

2) Основные выборочные характеристики вычисляются по формулам:

$$\overline{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i n_i$$ — выборочная средняя;

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_в\right)^2 n_i$$ — исправленная выборочная дисперсия;

$$s = \sqrt{s^2}$$ — исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение;

$$\sigma_{\overline{x}_в} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$ — среднее квадратическое отклонение выборочной средней;

$$V = \frac{s}{\left|\overline{x}_в\right|}\cdot 100\%$$ — коэффициент вариации.

Расчеты $\overline{x}_в$ и s^2 удобно проводить с помощью таблицы 22:

Таблица 22. Расчетная таблица выборочных характеристик

Варианта x_i	Частота варианты n_i	$x_i n_i$	$\left(x_i - \overline{x}_в\right)^2 n_i$
1	*2*	*3*	*4*
25,9	1	25,9	104,04
27,0	1	27,0	82,81
30,8	1	30,8	28,09
31,3	1	31,3	23,04
33,4	1	33,4	7,29
33,7	1	33,7	5,76
34,2	1	34,2	3,61
35,3	2	70,6	1,28
35,5	1	35,5	0,36
35,9	2	71,8	0,08
37,4	1	37,4	1,69
38,4	1	38,4	5,29
38,6	1	38,6	6,25
38,8	1	38,8	7,29
40,9	1	40,9	23,04
42,7	1	42,7	43,56
44,1	1	44,1	64,00
46,2	1	46,2	102,01
$\sum$		721,3	509,49

Найдем выборочную среднюю:

$$\overline{x}_в = \frac{1}{20} \cdot 721,3 \approx 36,1 \text{ см.}$$

Вычислим исправленную выборочную дисперсию:

$$s^2 \approx \frac{1}{20-1} \cdot 509,49 \approx 26,8 \text{ см}^2$$

Найдем исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$s \approx \sqrt{26,8} \approx 5,2 \text{ см.}$$

Вычислим среднее квадратическое отклонение выборочной средней:

$$\sigma_{\overline{x}_в} \approx \frac{5,2}{\sqrt{20}} \approx 1,2 \text{ см.}$$

Найдем коэффициент вариации:

$$V \approx \frac{5,2}{36,1} \cdot 100\% \approx 14,4\% .$$

Так как $10\% < V < 20\%$, то изменчивость длины стебля следует считать средней.

3) Доверительный интервал для оценки генеральной средней определяется следующим неравенством

$$\overline{x}_в - t_\gamma \sigma_{\overline{x}_в} < \overline{x}_Г < \overline{x}_в + t_\gamma \sigma_{\overline{x}_в},$$

где величина t_γ при заданной надежности γ определяется с помощью таблицы приложения 5. В нашем примере

$$t_\gamma = t(\gamma; n) = t(0{,}95;\ 20) = 2{,}1.$$

Вычислим радиус доверительного интервала:

$$t_\gamma \sigma_{\overline{x}_в} \approx 2{,}1 \cdot 1{,}2 = 2{,}52 \approx 2{,}5 \text{ см}.$$

Таким образом, с надежностью 95% можно утверждать, что во всей партии растений средняя длина стебля (генеральная средняя) заключена в пределах от $\overline{x}_в - t_\gamma \sigma_{\overline{x}_в} \approx 36{,}1 - 2{,}5 \approx 33{,}6$ см (гарантированный минимум) и $\overline{x}_в + t_\gamma \sigma_{\overline{x}_в} \approx 36{,}1 + 2{,}5 \approx 38{,}6$ см (возможный максимум). То есть доверительный интервал для оценки генеральной средней задается неравенством

$$33{,}6 \text{ см} < \overline{x}_Г < 38{,}6 \text{ см}.$$

Ответ: $\overline{x}_в \approx 36{,}1$ см, $s^2 \approx 26{,}8$ см^2, $s \approx 5{,}2$ см, $\sigma_{\overline{x}_в} \approx 1{,}2$ см, $V \approx 14{,}4\ \%$, $33{,}6 \text{ см} < \overline{x}_Г < 38{,}6 \text{ см}$.

Задание 2. Проверить нулевую гипотезу о том, что заданное значение $a_0 = 10$ является математическим ожиданием нормально распределенной случайной величины при 5 %-м уровне значимости для двусторонней критической области, если в результате обработки выборки объема $n = 10$ получено выборочное среднее $\overline{x_в} = 12$, а выборочное среднее квадратическое отклонение равно $s = 1$.

Решение

$H_0 : a = a_0 = 10$ – нулевая гипотеза.

Вычислим наблюдаемое значение критерия по формуле

$$u_{\text{набл.}} = \frac{\left(\overline{x_в} - a_0\right)\sqrt{n}}{s}.$$

Получаем $u_{\text{набл.}} = \dfrac{(12-10)\sqrt{10}}{1} = 2\sqrt{10} \approx 6{,}32$, $\left|u_{\text{набл.}}\right| \approx 6{,}32$.

Так как по условию критическая область является двусторонней, то конкурирующая гипотеза имеет вид $H_1 : a \neq a_0$, т. е. $H_1 : a \neq 10$.

Найдем критическую точку $u_{\text{кр.}}$ двусторонней критической области из равенства $\Phi\left(u_{\text{кр.}}\right) = \dfrac{1-\alpha}{2}$, где α – уровень значимости, $\Phi(x)$ – функция Лапласа, значения которой приведены в таблице приложения 4.

По условию уровень значимости $\alpha = 0,05$.
Тогда
$$\Phi\left(u_{\text{кр.}}\right) = \frac{1-0,05}{2} = 0,475.$$
По таблице функции Лапласа находим $u_{\text{кр.}} \approx 1,96$.
Получили $\left|u_{\text{набл.}}\right| > u_{\text{кр.}}$
Следовательно, нулевая гипотеза $H_0 : a = a_0 = 10$ отвергается.
Итак, выборочная и гипотетическая средние различаются значимо.

Задание 3. Даны значения переменных X и Y (табл. 23).

Таблица 23. Исходные данные

№ наблюдения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	83	72	69	90	90	95	95	91	75	70
y_i	56	42	18	84	56	107	90	68	31	48

Требуется:

1) найти коэффициент корреляции и сделать вывод о тесноте и направлении линейной корреляционной связи межу переменными X и Y;

2) составить уравнение прямой регрессии Y на X;

3) нанести на чертеж исходные данные и построить прямую регрессии.

Решение

1) В случае малых выборок расчет коэффициента корреляции можно проводить по формуле
$$r = \frac{\sum\left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right)}{\sqrt{\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2}\sqrt{\sum\left(y_i - \bar{y}\right)^2}}.$$

Промежуточные вычисления удобно располагать в виде таблицы (табл. 24).
Вычисляем средние:
$$\bar{x} = \frac{830}{10} = 83, \quad \bar{y} = \frac{600}{10} = 60.$$

Теперь заполняем последние пять столбцов таблицы 24. Суммируя элементы в соответствующих столбцах, находим
$$\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = 990,$$
$$\sum\left(y_i - \bar{y}\right)^2 = 6854,$$
$$\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2\left(y_i - \bar{y}\right)^2 = 2302.$$

Таблица 24. Промежуточные вычисления для расчета коэффициента корреляции

№ наблюдения	x_i	y_i	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$y_i-\bar{y}$	$(y_i-\bar{y})^2$	$(x_i-\bar{x})^2(y_i-\bar{y})^2$
1	83	56	0	0	-4	16	0
2	72	42	-11	121	-18	324	198
3	69	18	-14	186	-42	1764	588
4	90	84	7	49	24	576	168
5	90	56	7	49	-4	16	-28
6	95	107	12	144	47	2209	564
7	95	90	12	144	30	900	360
8	91	68	8	64	8	64	64
9	75	31	-8	64	-29	841	232
10	70	48	-13	169	-12	144	156
$\sum$	830	600	0	990	0	6854	2302

Подставляя вычисленные значения в выражение для r, получаем

$$r = \frac{2302}{\sqrt{990 \cdot 6854}} = 0{,}88\,.$$

Вывод: между переменными X и Y существует тесная положительная линейная корреляционная связь.

2) Коэффициент регрессии $b_{y/x} = \dfrac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum(x_i-\bar{x})^2}$

Используя данные из таблицы 24, получим

$$b_{y/x} = \frac{2302}{990} \approx 2{,}32\,.$$

Подставляя теперь в уравнение прямой регрессии $y-\bar{y} = b_{y/x}(x-\bar{x})$ найденные значения $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $b_{y/x}$, имеем

$$y - 60 = 2{,}32(x-83).$$

Последнее уравнение преобразуем к виду

$$y = 2{,}32x - 132{,}56\,.$$

2) Нанесем исходные данные на координатную плоскость и построим найденную прямую регрессии (*выполните самостоятельно*).

Для того чтобы провести прямую в системе координат, достаточно иметь две точки. У нас одна из них — точка M_1 с координатами $\bar{x} = 83$,

$\overline{y} = 60$. Координаты второй точки M_2 определим, подставив в уравнение регрессии $y = 0$ и вычислив $x = \dfrac{132,56}{2,32} \approx 57$.

Отметим, что полученная математическая модель (уравнение прямой регрессии) обладает прогнозирующими свойствами лишь при изменении переменной X от 69 до 95. Так, например, можно с достаточной степенью достоверности считать, что при значении $x = 80$ переменная y будет равна

$$y = 2,32 \cdot 80 - 132,56 \approx 53.$$

2) Нанесем исходные данные на координатную плоскость и построим найденную прямую регрессии (*построить самостоятельно*).

Для того чтобы провести прямую в системе координат, достаточно иметь две точки. У нас одна из них — точка M_1 с координатами $\overline{x} = 83$, $\overline{y} = 60$. Координаты второй точки M_2 определим, подставив в уравнение регрессии $y = 0$ и вычислив $x = \dfrac{132,56}{2,32} \approx 57$.

Отметим, что полученная математическая модель (уравнение прямой регрессии) обладает прогнозирующими свойствами лишь при изменении переменной X от 69 до 95. Так, например, можно с достаточной степенью достоверности считать, что при значении $x = 80$ переменная y будет равна

$$y = 2,32 \cdot 80 - 132,56 \approx 53.$$

3.2. Самостоятельное изучение учебного материала

Конспект №3 «Точечные и интервальные оценки параметров распределения»

Ответьте на вопросы:

1. Что называют статистическими оценками параметров генеральной совокупности?
2. Какая статистическая оценка параметра генеральной совокупности называется точечной?
3. Какая статистическая оценка параметра генеральной совокупности называется несмещенной?
4. Какая статистическая оценка параметра генеральной совокупности называется состоятельной?
5. Какая статистическая оценка параметра генеральной совокупности называется эффективной?
6. Какая статистическая оценка является несмещенной и состоятельной оценкой генеральной средней? По какой формуле она находится?
7. Какая статистическая оценка является состоятельной, но смещенной оценкой дисперсии генеральной совокупности? По какой

формуле она находится? При каких объемах выборки ее обычно используют?

8. Какая статистическая оценка является состоятельной и несмещенной оценкой дисперсии генеральной совокупности? По какой формуле она находится? При каких объемах выборки ее обычно используют?

9. По каким формулам вычисляют дисперсию и среднее квадратическое отклонение выборочной средней для повторной и бесповторной выборки?

10. Какая статистическая оценка параметра генеральной совокупности называется интервальной?

11. Что называют доверительным интервалом и надежностью оцениваемого параметра генеральной совокупности?

12. Какое неравенство задает доверительный интервал для генеральной средней при заданной надежности γ и неизвестном среднем квадратическом отклонении σ генеральной совокупности в случае ее нормального распределения и объеме выборки $n \leq 30$?

13. Какое неравенство задает доверительный интервал для генеральной средней при заданной надежности γ и известном среднем квадратическом отклонении σ генеральной совокупности в случае ее нормального распределения объеме выборки $n > 30$?

Решите задачи:

№1. Из генеральной совокупности извлечена выборка (табл. 25).

Таблица 25. Исходные данные

x_i	0	1	2	5
n_i	12	3	4	2

Найти несмещенные оценки генеральной средней и генеральной дисперсии.

№2. Из 1500 деталей отобрано 250. Вычислена точечная оценка генеральной средней $\overline{x}_в = 8,44$ и точечная оценка генеральной дисперсии $s^2 = 0,042$. Найти дисперсию $\sigma^2_{\overline{x}_в}$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\overline{x}_в}$ оценки $\overline{x}_в$ для повторного и бесповторного отбора.

№3. Из партии в 5000 электрических ламп было отобрано 300 по схеме бесповторной выборки. Средняя продолжительность горения ламп в выборке оказалась равной 1450 часов. Найти с надежностью $\gamma = 0,9996$ доверительный интервал для средней продолжительности горения лампы всей партии, если известно, что среднее квадратическое отклонение продолжительности горения лампы $\sigma = 20$ ч. Предполагается, что продолжительность горения ламп распределена нормально.

№4. По данным девяти независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдены выборочная средняя $\overline{x}_в = 30{,}1$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $s = 6$. Оценить истинное значение измеряемой величины с помощью доверительного интервала с надежностью $\gamma = 0{,}99$. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

Учебно-исследовательская работа № 3
«Применение математической статистики в прикладных задачах будущей деятельности»

Составьте и решите 1-2 задачи на применение математической статистики в прикладных задачах будущей профессиональной деятельности.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

Основная литература

1. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст] : учеб. пособие для вузов. – 6-е изд., доп. – Москва : Высшая школа, 2003. – 405 с.
2. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учеб. пособие для вузов. – 8-е изд., стереотип. – Москва : Высшая школа, 2002. – 479 с.
3. Зайцев, И.А. Высшая математика [Текст] : учебник для с.-х. вузов. – 2-е изд., исправл. и доп. – Москва : Высшая школа, 1998. – 409 с.
4. Марусич, А.И. Математика [Текст] : учебник для с.-х. вузов / А.И. Марусич ; Костромская ГСХА. Каф. высшей математики. – Караваево : Костромская ГСХА, 2014. – 218 с.
5. Минорский, В.П. Сборник задач по высшей математике : учебное пособие для втузов. – 14-е изд., испр. – Москва : Физико-математическая литература, 2003. – 336 с.
6. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике : в 2 ч. [Текст] . Ч. 1. – 6-е изд. – Москва : Айрис-Пресс, 2011. – 288 с.
7. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: в 2 ч. [Текст] : тридцать пять лекций. Ч. 2. – 5-е изд. – Москва : Айрис-Пресс, 2007. – 256 с.

Дополнительная литература

1. Антонов, В.И. Элементарная математика для первокурсника : учебное пособие. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 112 с.
2. Баврин, И.И. Высшая математика для химиков, биологов и медиков : учебник и практикум для прикладного бакалавриата. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Юрайт, 2016. – 329 с.
3. Кытманов, А.М. Математика. Адаптационный курс : учебное пособие. – 2-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 288 с.
4. Лихолетов, И.И. Высшая математика, теория вероятностей и математическая статистика [Текст]. – Москва : Вышейшая школа, 1976. – 719 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Правила и формулы дифференцирования

Функция простого аргумента	*Сложная функция*
$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$	$\left(u^n\right)' = nu^{n-1}u'$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$
$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
$\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$
$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$	$\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
$\left(\sin x\right)' = \cos x$	$\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$
$\left(\cos x\right)' = -\sin x$	$\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$
$\left(\mathrm{tg} x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\left(\mathrm{tg} u\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
$\left(\mathrm{ctg} x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\left(\mathrm{ctg} u\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$\left(\mathrm{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\left(\mathrm{arctg} u\right)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$\left(\mathrm{arcctg} x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$\left(\mathrm{arcctg} u\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
Основные правила дифференцирования	
$C' = 0$	$\left(u+v\right)' = u' + v'$
$\left(Cu\right)' = Cu'$	$\left(u-v\right)' = u' - v'$
$(uv)' = u'v + uv'$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Приложение 2

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int u^a du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C \ (a \neq -1)$

2. $\int du = u + C$

3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

5. $\int e^u du = e^u + C$

6. $\int \sin u du = -\cos u + C$

7. $\int \cos u du = \sin u + C$

8. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg} u + C$

9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg} u + C$

10. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$

10.1. $\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \arcsin u + C$

11. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$

12. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{u}{a} + C$

12.1. $\int \frac{du}{1 + u^2} = \mathrm{arctg} u + C$

13. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$

Дополнительные формулы:

1. $\int \mathrm{tg} u du = -\ln|\cos u| + C$

2. $\int \mathrm{ctg} u du = \ln|\sin u| + C$

3. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\mathrm{tg} \frac{u}{2}\right| + C$

4. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right| + C$

Приложение 3

Значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Значения функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,40	0,1554	0,80	0,2881	1,20	0,3849
0,01	0,0040	0,41	0,1591	0,81	0,2910	1,21	0,3869
0,02	0,0080	0,42	0,1628	0,82	0,2939	1,22	0,3883
0,03	0,0120	0,43	0,1664	0,83	0,2967	1,23	0,3907
0,04	0,0160	0,44	0,1700	0,84	0,2995	1,24	0,3925
0,05	0,0199	0,45	0,1736	0,85	0,3023	1,25	0,3944
0,06	0,0239	0,46	0,1772	0,86	0,3051	1,26	0,3962
0,07	0,0279	0,47	0,1808	0,87	0,3078	1,27	0,3980
0,08	0,0319	0,48	0,1844	0,88	0,3106	1,28	0,3997
0,09	0,0359	0,49	0,1879	0,89	0,3133	1,29	0,4015
0,10	0,0398	0,50	0,1915	0,90	0,3159	1,30	0,4032
0,11	0,0438	0,51	0,1950	0,91	0,3186	1,31	0,4049
0,12	0,0478	0,52	0,1985	0,92	0,3212	1,32	0,4066
0,13	0,0517	0,53	0,2019	0,93	0,3238	1,33	0,4082
0,14	0,0557	0,54	0,2054	0,94	0,3264	1,34	0,4099
0,15	0,0596	0,55	0,2088	0,95	0,3289	1,35	0,4115
0,16	0,0636	0,56	0,2123	0,96	0,3315	1,36	0,4131
0,17	0,0675	0,57	0,2157	0,97	0,3340	1,37	0,4147
0,18	0,0714	0,58	0,2190	0,98	0,3365	1,38	0,4162
0,19	0,0753	0,59	0,2224	0,99	0,3389	1,39	0,4177
0,20	0,0793	0,60	0,2257	1,00	0,3413	1,40	0,4192
0,21	0,0832	0,61	0,2291	1,01	0,3438	1,41	0,4207
0,22	0,0871	0,62	0,2324	1,02	0,3461	1,42	0,4222
0,23	0,0910	0,63	0,2357	1,03	0,3485	1,43	0,4236
0,24	0,0948	0,64	0,2389	1,04	0,3508	1,44	0,4251
0,25	0,0987	0,65	0,2422	1,05	0,3531	1,45	0,4265
0,26	0,1026	0,66	0,2454	1,06	0,3554	1,46	0,4279
0,27	0,1064	0,67	0,2486	1,07	0,3577	1,47	0,4292
0,28	0,1103	0,68	0,2517	1,08	0,3599	1,48	0,4306
0,29	0,1141	0,69	0,2549	1,09	0,3621	1,49	0,4319
0,30	0,1179	0,70	0,2580	1,10	0,3643	1,50	0,4332
0,31	0,1217	0,71	0,2611	1,11	0,3665	1,51	0,4345
0,32	0,1255	0,72	0,2642	1,12	0,3686	1,52	0,4357
0,33	0,1293	0,73	0,2673	1,13	0,3708	1,53	0,4370
0,34	0,1331	0,74	0,2703	1,14	0,3729	1,54	0,4382
0,35	0,1368	0,75	0,2734	1,15	0,3749	1,55	0,4394
0,36	0,1406	0,76	0,2764	1,16	0,3770	1,56	0,4406
0,37	0,1443	0,77	0,2794	1,17	0,3790	1,57	0,4418
0,38	0,1480	0,78	0,2823	1,18	0,3810	1,58	0,4429
0,39	0,1517	0,79	0,2852	1,19	0,3830	1,59	0,4441

Окончание приложения 4

1	2	3	4	5	6	7	8
1,60	0,4452	1,85	0,4678	2,20	0,4861	2,70	0,4965
1,61	0,4463	1,86	0,4686	2,22	0,4868	2,72	0,4967
1,62	0,4474	1,87	0,4693	2,24	0,4875	2,74	0,4969
1,63	0,4484	1,88	0,4699	2,26	0,4881	2,76	0,4971
1,64	0,4495	1,89	0,4706	2,28	0,4887	2,78	0,4973
1,65	0,4505	1,90	0,4713	2,30	0,4893	2,80	0,4974
1,66	0,4515	1,91	0,4719	2,32	0,4898	2,82	0,4976
1,67	0,4525	1,92	0,4726	2,34	0,4904	2,84	0,4977
1,68	0,4535	1,93	0,4732	2,36	0,4909	2,86	0,4979
1,69	0,4545	1,94	0,4738	2,38	0,4913	2,88	0,4980
1,70	0,4554	1,95	0,4744	2,40	0,4918	2,90	0,4981
1,71	0,4564	1,96	0,4750	2,42	0,4922	2,92	0,4982
1,72	0,4573	1,97	0,4756	2,44	0,4927	2,94	0,4984
1,73	0,4582	1,98	0,4761	2,46	0,4931	2,96	0,4985
1,74	0,4591	1,99	0,4767	2,48	0,4934	2,98	0,4986
1,75	0,4599	2,00	0,4772	2,50	0,4938	3,00	0,49865
1,76	0,4608	2,02	0,4783	2,52	0,4941	3,20	0,49931
1,77	0,4616	2,04	0,4793	2,54	0,4945	3,40	0,49966
1,78	0,4625	2,06	0,4803	2,56	0,4948	3,60	0,499841
1,79	0,4633	2,08	0,4812	2,58	0,4951	3,80	0,499928
1,80	0,4641	2,10	0,4821	2,60	0,4953	4,00	0,499968
1,81	0,4649	2,12	0,4830	2,62	0,4956	4,50	0,499997
1,82	0,4656	2,14	0,4838	2,64	0,4959	5,00	0,49999997
1,83	0,4664	2,16	0,4846	2,66	0,4961	∞	0,5
1,84	0,4671	2,18	0,4854	2,68	0,4963		

Приложение 5

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma; n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Учебно-методическое издание

Математика и математическая статистика : учебно-методическое пособие / сост. Л.Б. Рыбина. — Караваево : Костромская ГСХА, 2025. — 54 с. ; 20 см. — 50 экз. — Текст непосредственный.

Учебно-методическое пособие издается в авторской редакции

Компьютерный набор. Подписано в печать ____________. Заказ № 1488.
Формат 60x84/16. Тираж 50 экз. Усл. печ. л. 3,14. Бумага офсетная.
Отпечатано ___________.

вид издания: первичное (электронная версия)
(редакция от 3.02.2025 № 1488)

Отпечатано с готовых оригинал-макетов в академической типографии
на цифровом дубликаторе. Качество соответствует предоставленным
оригиналам.
(Электронная версия издания - I:\подразделения \рио\издания 2025\1488.pdf)

2025*1488

ФГБОУ ВО КОСТРОМСКАЯ ГСХА

2025*1488

(Электронная версия издания - I:\подразделения \рио\издания 2025\1488.pdf)